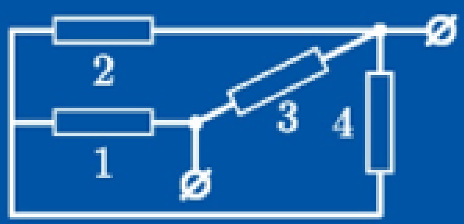
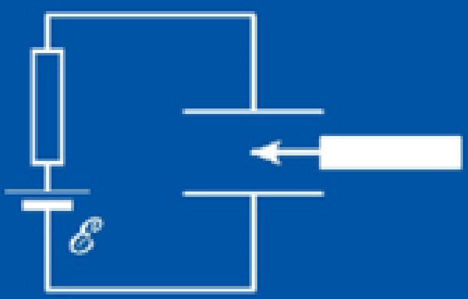
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

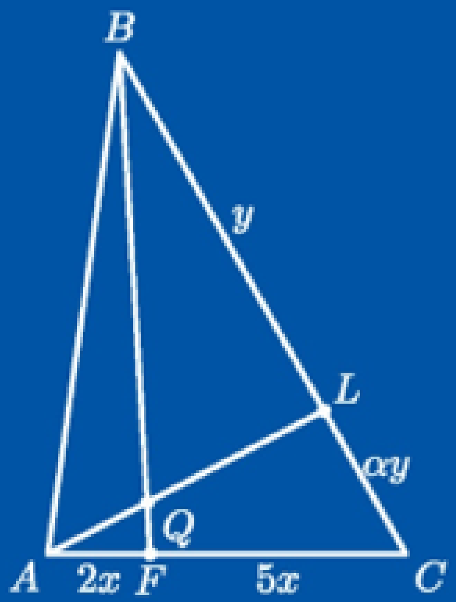


Задачи

физико-математических олимпиад



Phystech.International 2017



(методические разработки
по физике и математике)

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования

«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

ЗАДАЧИ

физико-математических олимпиад «Phystech.International» 2017

Учебно-методические разработки
по физике и математике

Москва
МФТИ
2018

УДК 53
ББК 22.3

Б61 **Задачи физико-математической олимпиады «Phystech.International» 2017.** (Учебно-методические разработки по физике и математике). // Чивилёв В.И., Усков В.В., Шеронов А.А., Юрьев Ю.В., Плис В.И., Агаханов Н.Х., Глухов И.В., Городецкий С.Е., Подлипский О.К. – М.: МФТИ, 2018. – 48 с.

Приведены задачи, предлагавшиеся на заключительном этапе олимпиады «Phystech.International» в декабре 2017 г. (2017-2018 учебный год).

Все задачи снабжены ответами, часть — подробными решениями.

Предназначены для абитуриентов МФТИ и других технических вузов, а также для преподавателей школ с углубленным изучением физики и математики.

УДК 53
ББК 22.3

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2018
© Коллектив авторов, 2018

Содержание

Условия задач

Ответы и решения

ФИЗИКА

БИЛЕТ 1, 9 класс

1. Первый вагон поезда прошел мимо наблюдателя, стоящего на платформе, за $\tau_1 = 1$ с, а второй — за $\tau_2 = 1{,}5$ с. Длина каждого вагона $L = 12$ м. Найдите скорость V_0 поезда в начале наблюдения. Поезд движется по прямой равнозамедленно.

2. Начальная скорость камня, брошенного под углом к горизонту, равна $V_0 = 10$ м/с, а через $\tau = 0{,}5$ с величина скорости камня уменьшилась до $V = 7$ м/с. Через какое время T после старта камень находился на максимальной высоте? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

3. Подвешенному на нити шарику сообщили начальную скорость в горизонтальном направлении. В тот момент, когда нить отклонилась на угол $\alpha = 30^\circ$ от вертикали, ускорение шарика направлено горизонтально. Какой угол $\alpha_{\max}$ с вертикалью будет образовывать нить в момент остановки шарика?

4. В очень легком калориметре находятся вода массой $M = 0{,}1$ кг и кусок льда массой $m = 0{,}05$ кг. Температура воды и льда $t_0 = 0$ °C, температура окружающей среды $t_1 = 20$ °C. Из-за притока теплоты лед понемногу плавится — за $\tau = 5$ минут в воду превращается $m_1 = 1$ г льда. Какое время T пройдет (оценить) от момента полного плавления льда до увеличения температуры системы на $\Delta t = 1$ °C? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·К).

5. Цепь, схема которой показана на рисунке, подключена к источнику постоянного напряжения $U = 18$ В. Сопротивление каждого резистора равно $r = 5$ Ом. Найдите мощность P_1, рассеиваемую на резисторе 1.

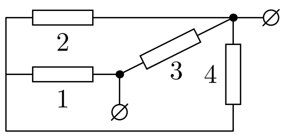


Рис. к задаче 5

БИЛЕТ 2, 9 класс

1. Первый вагон поезда прошел мимо наблюдателя, стоящего на платформе, за $\tau_1 = 1$ с, а второй — за $\tau_2 = 1{,}5$ с. Длина каждого вагона $L = 12$ м. Через какое время T после начала наблюдения поезд остановился? В процессе торможения поезд движется по прямой равнозамедленно.

2. Начальная скорость камня, брошенного под углом к горизонту, равна $V_0 = 10$ м/с, а через $\tau = 0{,}5$ с величина скорости камня уменьшилась до $V = 7$ м/с. Найдите максимальную высоту H полета камня. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

3. На нити подвешен шарик. Шарик отводят в сторону так, что нить принимает горизонтальное положение, и отпускают. Какой угол α образует нить с вертикалью в тот момент, когда ускорение шарика направлено горизонтально?

4. В калориметр, содержащий $m_1 = 2$ кг льда при температуре $t_1 = -5\,^\circ$C, добавили $m_2 = 200$ г воды при температуре $t_2 = +5\,^\circ$C. Определите массу m льда в калориметре после установления равновесия. Удельные теплоемкости льда $c_1 = 2100$ Дж/(кг·К), воды $c_2 = 4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

5. Цепь, схема которой показана на рисунке, подключена к источнику постоянного напряжения. Сопротивления всех резисторов равны. На резисторе 1 рассеивается мощность $P_1 = 10$ Вт. Найдите мощность P, рассеиваемую на всей цепи.

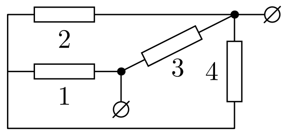


Рис. к задаче 5

БИЛЕТ 3, 10 класс

1. Мальчик бьет ногой по мячу, который лежал на горизонтальной поверхности земли, на некотором расстоянии от вертикальной стены дома. Мяч полетел под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту и после упругого столкновения со стеной упал через время $t_0 = 1{,}5$ секунды после начала полета на то же место, где лежал вначале.

1) На каком расстоянии L от стены лежал мяч вначале?

2) Найти высоту H от поверхности земли до места удара мяча о стену. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

2. Шарик массой m_1, скользивший по гладкой горизонтальной поверхности, сталкивается с шариком массой m_2, который покоился на той же поверхности. После центрального упругого удара шарик массой m_1 начал двигаться в обратном направлении со скоростью в 3 раза меньшей начальной.

1) Найти отношение масс $\frac{m_2}{m_1}$.

2) Найти отношение скорости шарика массой m_2, после столкновения к скорости шарика массой m_1 до столкновения.

3. Навстречу шарику, скользящему по гладкой горизонтальной поверхности, движется по той же поверхности брусок. Шарик и брусок движутся вдоль одной прямой. Скорость шарика перпендикулярна грани бруска, о которую он ударяется. Масса бруска много больше массы шарика. После упругого удара шарик движется в обратном направлении со скоростью, которая в 2 раза больше его начальной скорости.

Найти отношение скоростей движения шарика и бруска до столкновения.

4. В двух теплоизолированных сосудах одинакового объема, соединенных короткой трубкой с закрытым краном, находятся $\nu_1 = 1/3$ моль одноатомного идеального газа при температуре $T_1 = 300$ К и $\nu_2 = 1/5$ моль другого одноатомного идеального газа при температуре $T_2 = 500$ К. Кран открывается, газы в сосудах смешиваются.

1) Найти температуру в сосудах после установления теплового равновесия.

2) Найти отношение конечного давления в смеси газов к начальному давлению в сосуде с температурой T_2.

5. Объем идеального газа увеличивается в $n = 3$ раза в изобарическом процессе, а затем еще раз увеличивается в $n = 3$ раза в процессе прямо пропорциональной зависимости давления газа

P от его объема V.

1) Во сколько раз увеличивается конечная температура газа по сравнению с начальной?

2) Найти отношение работы, которую совершает газ в изобарическом процессе, к работе, которую он совершает в процессе прямо пропорциональной зависимости давления газа P от его объема V.

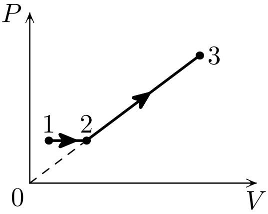


Рис. к задаче 5

БИЛЕТ 4, 10 класс

1. Мальчик бьет ногой по мячу, который лежал на горизонтальной поверхности земли на некотором расстоянии от вертикальной стены дома. Мяч полетел под углом $\alpha = 60°$ к горизонту и после упругого столкновения со стеной упал через время $t_0 = 2$ секунды после начала полета на то же место, где лежал вначале.

1) На каком расстоянии L от стены лежал мяч вначале?

2) Найти высоту H от поверхности земли до места удара мяча о стену. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

2. Шарик массой m_1, скользивший по гладкой горизонтальной поверхности, сталкивается с шариком массой m_2, который покоился на той же поверхности. После центрального упругого удара шарик массой m_1 начал двигаться в обратном направлении со скоростью в 2 раза меньшей начальной.

1) Найти отношение масс $\dfrac{m_2}{m_1}$.

2) Найти отношение скорости шарика массой m_2 к скорости шарика массой m_1 до столкновения.

3. Навстречу шарику, скользящему по гладкой горизонтальной поверхности, движется по той же поверхности брусок. Шарик и брусок движутся вдоль одной прямой. Скорость шарика перпендикулярна грани бруска, о которую он ударяется. Масса бруска много больше массы шарика. После упругого удара шарик движется в обратном направлении со скоростью, которая в 4 раза больше его начальной скорости.

Найти отношение скоростей движения шарика и бруска до столкновения.

4. В двух теплоизолированных сосудах одинакового объема, соединенных короткой трубкой с закрытым краном, находятся $\nu_1 = 1/2$ моль одноатомного идеального газа при температуре $T_1 = 200$ К и $\nu_2 = 1/3$ моль другого одноатомного газа при температуре $T_2 = 300$ К. Кран открывается, газы в сосудах смешиваются.

1) Найти температуру в сосудах после установления теплового равновесия.

2) Найти отношение конечного давления в смеси газов к начальному давлению в сосуде с температурой T_1.

5. Объем идеального газа увеличивается в $n = 2$ раза в изобарическом процессе, а затем еще раз увеличивается в $n = 2$ раза в процессе прямо пропорциональной зависимости давления газа P от его объема V.

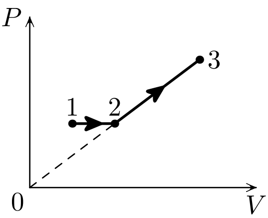


Рис. к задаче 5

1) Во сколько раз увеличивается конечная температура газа по сравнению с начальной?

2) Найти отношение работы, которую совершает газ в изобарическом процессе, к работе, которую он совершает в процессе прямо пропорциональной зависимости давления газа P от его объема V.

БИЛЕТ 5, 11 класс

1. Небольшой шарик висит на легкой нити длиной 50 см. Какую минимальную горизонтальную скорость надо сообщить шарику, чтобы он, двигаясь по окружности, совершил полный оборот в вертикальной плоскости? Принять $g = 10$ м/с^2.

2. Небольшая шайба массой m скользит по гладкому горизонтальному столу со скоростью v_0 к неподвижной незакрепленной горке массой $3m$ (см. рис.). Шайба въезжает на горку, движется по ней без трения и отрыва и съезжает с горки в обратном направлении.

1) На какую максимальную высоту поднимается шайба?

2) С какой скоростью шайба съезжает с горки?

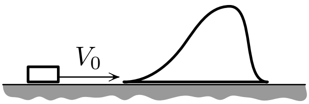


Рис. к задаче 2

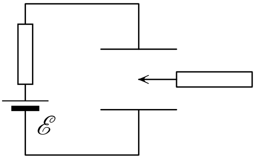


Рис. к задаче 4

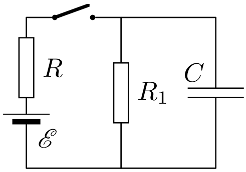


Рис. к задаче 5

3. Теплоизолированный сосуд объемом $V = 8{,}31 \cdot 10^{-3}$ м^3 разделен перегородкой на две части с различными объемами. В первой части находится гелий при температуре 27 °C в количестве $\nu_1 = 0{,}2$ моль. Во второй части находится гелий при температуре 7 °C в количестве $\nu_2 = 0{,}3$ моль. Перегородка прорывается.

1) Какая температура (в градусах Цельсия) установится в сосуде после наступления термодинамического равновесия?

2) Найти конечное давление в сосуде.

4. Плоский воздушный конденсатор емкостью C_0 подсоединен через резистор к источнику с ЭДС $\mathscr{E}$. (см. рис.). В конденсатор вводят параллельно обкладкам незаряженную проводящую пластину и располагают ее напротив обкладок. Форма поверхности пластины совпадает с формой поверхности обкладок. Толщина пластины в 4 раза меньше расстояния между обкладками.

1) Найти емкость конденсатора с пластиной.

2) Какой заряд пройдет через резистор после начала введения пластины?

5. В цепи, схема которой показана на рисунке, ключ разомкнут. Параметры цепи указаны на схеме. Внутреннее сопротивление источника «содержится» в R, $R1 = 3R$. Ключ замыкают. После достижения в цепи установившегося режима ключ размыкают. Известными величинами считать C, $\mathscr{E}$, R.

1) Найти ток через источник сразу после замыкания ключа.

2) Найти установившееся напряжение на конденсаторе при замкнутом ключе.

3) Какое количество теплоты выделится в цепи после размыкания ключа?

БИЛЕТ 6, 11 класс

1. Небольшой шарик висит на легкой нити длиной 18 см. Какую минимальную горизонтальную скорость надо сообщить шарику, чтобы он, двигаясь по окружности, совершил полный оборот в вертикальной плоскости? Принять $g = 10$ м/с^2.

2. Небольшая монета массой m скользит по гладкому горизонтальному столу со скоростью v_0 к неподвижной незакрепленной горке массой $4m$ (см. рис.). Монета въезжает на горку, движется по ней без трения и отрыва и съезжает с горки в обратном направлении.

1) На какую максимальную высоту поднимается монета?

2) С какой скоростью монета съезжает с горки?

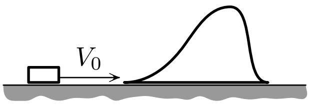


Рис. к задаче 2

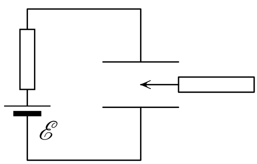


Рис. к задаче 4

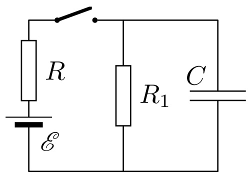


Рис. к задаче 5

3. Теплоизолированный сосуд объемом $V = 8{,}31 \cdot 10^{-3}$ м^3 разделен перегородкой на две части с различными объемами. В первой части находится гелий при температуре 127 °C в количестве $\nu_1 = 0{,}1$ моль. Во второй части находится гелий при температуре 7 °C в количестве $\nu_2 = 0{,}4$ моль. Перегородка прорывается.

1) Какая температура (в градусах Цельсия) установится в сосуде после наступления термодинамического равновесия?

2) Найти конечное давление в сосуде.

4. Плоский воздушный конденсатор емкостью C_0 подсоединен через резистор к источнику с ЭДС $\mathscr{E}$ (см. рис.). В конденсатор вводят параллельно обкладкам незаряженную проводящую пластину и располагают ее напротив обкладок. Форма поверхности пластины совпадает с формой поверхности обкладок. Толщина пластины в 3 раза меньше расстояния между обкладками.

1) Найти емкость конденсатора с пластиной.

2) Какой заряд пройдет через резистор после начала введения пластины?

5. В цепи, схема которой показана на рисунке, ключ разомкнут. Параметры цепи указаны на схеме. Внутреннее сопротивление источника «содержится» в R, $R_1 = 4R$. Ключ замыкают. После достижения в цепи установившегося режима ключ размыкают. Известными величинами считать C, $\mathscr{E}$, R.

1) Найти ток через источник сразу после замыкания ключа.

2) Найти установившееся напряжение на конденсаторе при замкнутом ключе.

3) Какое количество теплоты выделится в цепи после размыкания ключа?

МАТЕМАТИКА

БИЛЕТ 1, 9 класс

1. Парабола $y = 3x^2$ пересекает прямые $y = 147$, $y = 75$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 30$.

3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 22 марки на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 26 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то у него станет ровно 700 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)

4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 3a| \leqslant \sqrt{x-1}$ является отрезок длины 4?

5. Найдите количество 19-значных чисел, содержащих только цифры “2”, “5” и “7” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “7” ровно восемь, и они идут подряд.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $4 : 25$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 25]$, $[26; 50]$, $[51; 75]$, $[76; 100]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 25. Какое наименьшее значение может принимать сумма двадцати выбранных Пиноккио чисел?

БИЛЕТ 2, 9 класс

1. Парабола $y = 5x^2$ пересекает прямые $y = 125$, $y = 80$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 28$.

3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 15 марок на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 17 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 22 марки, то у него станет ровно 900 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)

4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leqslant \sqrt{x-3}$ является отрезок длины 2?

5. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “5” и “8” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “3” ровно шесть, и они идут подряд.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 4 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 25$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 40]$, $[41; 80]$, $[81; 120]$, $[121; 160]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 40. Какое наименьшее значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

БИЛЕТ 3, 10 класс

1. Парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ пересекает прямые $y = -1$, $y = 4$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

2. Найдите количество 16-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “4” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “9” ровно четыре, и они идут подряд.

3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD+BC-AB-CD=24$.

б) Найдите угол AOB, где O — центр окружности ω_3.

4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax-2a| \leqslant \sqrt{x-1}$ является отрезок длины 3?

5. Несколько рабочих выполняют работу за 28 дней. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 21 день. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 15 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 7 : 3$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $7 : 36$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 3.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1;30]$, $[31;60]$, $[61;90]$, $[91;120]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое наибольшее значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

БИЛЕТ 4, 10 класс

1. Парабола $y = 3x^2 - 4x + 2$ пересекает прямые $y = 17$, $y = 1$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

2. Найдите количество 20-значных чисел, содержащих только цифры "1", "5" и "6" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно десять, и они идут подряд.

3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD+BC-AB-CD=38$.

б) Найдите угол AOB, где O — центр окружности ω_3.

4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax-a| \leqslant \sqrt{x-2}$ является отрезок длины 1?

5. Несколько рабочих выполняют работу за 21 день. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 15 дней. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 10 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 7$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $8 : 21$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 13.

7. Пиноккио выбрал по 7 целых чисел из каждого промежутка $[1; 50]$, $[51; 100]$, $[101; 150]$, $[151; 200]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 50. Какое наибольшее значение может принимать сумма двадцати восьми выбранных Пиноккио чисел?

БИЛЕТ 5, 11 класс

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4.$$

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “7” и “8” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “8” ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

б) Найдите угол AOB, где O — центр окружности ω_3.

в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое наименьшее значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

БИЛЕТ 6, 11 класс

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120°?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3.$$

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “5” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “5” ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

б) Найдите угол AOB, где O — центр окружности ω_3.

в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое наименьшее значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФИЗИКА

Критерии оценивания задач

Заключительный этап олимпиады Phystech.International, 2017

17 декабря 2017 г.
Максимальная сумма баллов для каждой задачи — 10.

Билеты 1, 2 (9 класс)

Задача	Критерии оценивания	К-во очков
1.	Выражение длины 1-го вагона через V_0 и τ_1	3
	Выражение длины 2-го вагона через V_0, τ_1 и τ_2	3
	Правильный аналитический ответ	3
	Правильный численный ответ	1
2.	Правильно записаны все необходимые уравнения	4
	Правильный аналитический ответ	4
	Правильный численный ответ	2
3.	2-й закон Ньютона (для угла α)	4
	ЗСЭ	3
	Правильный аналитический ответ	2
	Правильный численный ответ	1
4.	Правильно записаны все уравнения	6
	Правильный аналитический ответ	3
	Правильный численный ответ	1
5.	Правильно записаны все уравнения	6
	Правильный аналитический ответ	3
	Правильный численный ответ	1

Билеты 3, 4 (10 класс)

Задача	Критерии оценивания	К-во очков
1.	Правильный аналитический ответ на 1 вопрос	4
	Правильный численный ответ на 1 вопрос	1
	Правильный аналитический ответ на 2 вопрос	4
	Правильный численный ответ на 2 вопрос	1
2.	Правильно записан ЗСИ	3
	Правильнозаписан ЗСЭ	3
	Правильный ответ на 1 вопрос	2

	Правильный ответ на 2 вопрос	2
3.	Есть идея перехода в П.С.О. бруска и сам переход. Или правильно записаны ЗСИ и ЗСЭ для конечной массы бруска	5
	Получен правильный результат при использовании ИСО бруска или путем устремления массы бруска к ∞	5
4.	Правильный аналитический ответ на 1 вопрос	4
	Правильный численный ответ на 1 вопрос	1
	Правильный аналитический ответ на 2 вопрос	4
	Правильный численный ответ на 2 вопрос	1
5.	Правильный аналитический ответ на 1 вопрос	4
	Правильный численный ответ на 1 вопрос	1
	Правильный аналитический ответ на 2 вопрос	4
	Правильный численный ответ на 2 вопрос	1

Билеты 5, 6 (11 класс)

Задача	Критерии оценивания	К-во очков
1.	Есть понимание, что в верхней точке скорость не 0	2
	Правильно записаны все необходимые уравнения	4
	Аналитический ответ	3
	Численный ответ	1
2.	Ответ на 1-й вопрос	5
	Ответ на 2-й вопрос	5
3.	Аналитический ответ на 1-й вопрос	5
	Численный ответ на 1-й вопрос	1
	Аналитический ответ на 2-й вопрос	3
	Численный ответ на2-й вопрос	1
4.	Ответ на 1-й вопрос	5
	Ответ на 2-й вопрос	5
5.	Ответ на 1-й вопрос	4
	Ответ на 2-й вопрос	3
	Ответ на 3-й вопрос	3

ПРИМЕЧАНИЕ. Правильные аналитические ответы можно получить разными путями. Правильный численный ответ — один!

ФИЗИКА

БИЛЕТ 1, 9 класс

1. Ответ. $v_0 = \dfrac{\tau_2^2 + 2\tau_1\tau_2 - \tau_1^2}{\tau_1\tau_2(\tau_1+\tau_2)} L = \dfrac{1{,}5^2 + 2\cdot 1{,}5 - 1}{1{,}5\cdot 2{,}5}\cdot 12 = 13{,}6$ м/с.

Решение.

$$\left.\begin{array}{c} a<0; \quad L = v_0\tau_1 + \dfrac{a\tau_1^2}{2}; \quad L - v_0\tau_1 = \dfrac{a\tau_1^2}{2}; \\ 2L = v_0(\tau_1+\tau_2) + \dfrac{a(\tau_1+\tau_2)^2}{2};\ 2L - v_0(\tau_1+\tau_2) = \dfrac{a(\tau_1+\tau_2)^2}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{L - v_0\tau_1}{2L - v_0(\tau_1+\tau_2)} = \dfrac{\tau_1^2}{(\tau_1+\tau_2)^2}$; $L(\tau_1+\tau_2)^2 - v_0\tau_1(\tau_1+\tau_2)^2 = 2L\tau_1^2 - v_0\tau_1^2(\tau_1+\tau_2)$; $v_0 = \dfrac{\tau_2^2 + 2\tau_1\tau_2 - \tau_1^2}{\tau_1\tau_2(\tau_1+\tau_2)} L = \dfrac{1{,}5^2 + 2\cdot 1{,}5 - 1}{1{,}5\cdot 2{,}5}\cdot 12 = 13{,}6$ м/с.

2. Ответ. $T = \dfrac{v_0^2 + (g\tau)^2 - v^2}{2g^2\tau} = 0{,}76$ с.

Решение. $\left.\begin{array}{c} v_x = v_0\cos\alpha, \\ v_y = v_0\sin\alpha - g\tau \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2\cos^2\alpha + v_0^2\sin^2\alpha + (g\tau)^2 - 2v_0\sin\alpha\cdot g\tau, \\ v^2 = v_0^2 + (g\tau)^2 - 2v_0\sin\alpha\cdot g\tau \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{v_0^2 + (g\tau)^2 - v^2}{2v_0 g\tau} \end{array}\right\}.$$

$$T = \frac{v_0\sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 + (g\tau)^2 - v^2}{2g^2\tau} = \frac{10^2 + (10\cdot 0{,}5)^2 - 7^2}{2\cdot 10^2\cdot 0{,}5} = 0{,}76 \text{ с.}$$

3. Ответ. $\cos\alpha_{\max} = \dfrac{2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\cos\alpha} = \dfrac{5}{4\sqrt{3}} \approx 0{,}72$; $\alpha_{\max} \approx 43{,}8^\circ$.

Решение. T — сила натяжения нити.

$$T\cos\alpha = mg; \quad T = \frac{mg}{\cos\alpha}; \tag{1}$$

$$T - mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{l}. \tag{2}$$

$(1) \to (2)$: $\dfrac{mg}{\cos\alpha} - mg\cos\alpha = \dfrac{mv^2}{l}$;

$$v^2 = gl\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right) = \frac{gl\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\,. \quad (3)$$

$$\text{ЗСЭ: } \frac{mv^2}{2} = mgl(\cos\alpha - \cos\alpha_{\max}). \quad (4)$$

$$(3) \to (4): \ \frac{gl\sin^2\alpha}{2\cos\alpha} = gl(\cos\alpha - \cos\alpha_{\max}).$$

$$\cos\alpha_{\max} = \cos\alpha - \frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{2\cdot\frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{5}{4\sqrt{3}} \approx 0{,}72, \quad \alpha_{\max} \approx 43{,}8^\circ.$$

4. Ответ. $T = \dfrac{(M+m)c\Delta t}{m_1\lambda}\tau \approx 9{,}5$ мин.

Решение. Приток тепла: $\dfrac{\Delta Q}{\Delta T} = \dfrac{\lambda m_1}{\tau}$ (1)

$$\frac{\Delta Q}{\Delta T}T = (M+m)c\Delta t \quad (2)$$

$$(1) \to (2): \quad \frac{\lambda m_1}{\tau}T = (M+m)c\Delta t.$$

$$T = \frac{(M+m)c\Delta t}{m_1\lambda}\tau = \frac{0{,}15\cdot 4200\cdot 1}{10^{-3}\cdot 3{,}3\cdot 10^5}\cdot 5 \approx 9{,}5 \text{ мин.}$$

5. Ответ. $P_1 = \dfrac{4V^2}{9r} = 28{,}8$ Вт.

Решение.

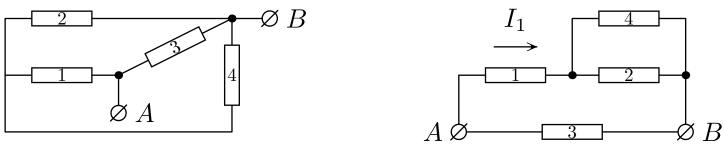


Рис. 1

$$r_{24} = \frac{r}{2}\,.$$

Сопротивление верхнего участка:

$$r_{124} = r + r_{24} = r + \frac{r}{2} = \frac{3}{2}r. \quad (1)$$

$$I_1 = \frac{U}{r_{124}} = \frac{U}{3/2r} = \frac{2}{3}\frac{U}{r}\,. \tag{2}$$

$$P_1 = I_1^2 r = \frac{4V^2}{9r} = \frac{4\cdot 18^2}{9\cdot 5} = 28{,}8\text{ Вт.}$$

БИЛЕТ 2, 9 класс

1. Ответ. $T = \dfrac{\tau_2^2 + 2\tau_1\tau_2 - \tau_1^2}{2(\tau_2-\tau_1)} = 4{,}25$ с.

Решение.

$$\left.\begin{aligned} &a<0;\quad L = v_0\tau_1 + \frac{a\tau_1^2}{2};\quad L - \frac{a\tau_1^2}{2} = v_0\tau_1;\\ &2L = v_0(\tau_1+\tau_2) + \frac{a(\tau_1+\tau_2)^2}{2};\ 2L - \frac{a(\tau_1+\tau_2)^2}{2} = v_0(\tau_1+\tau_2)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{L - a\tau_1^2/2}{2L - a(\tau_1+\tau_2)^2/2} = \frac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2}\,;\ L(\tau_1+\tau_2) - \frac{a\tau_1^2(\tau_1+\tau_2)}{2} =$$
$$= 2L\tau_1 - \frac{a(\tau_1+\tau_2)^2\tau_1}{2}\,.$$

$$a = \frac{2L(\tau_1-\tau_2)}{\tau_1\tau_2(\tau_1+\tau_2)}\,. \tag{1}$$

$$v_0 = \frac{L - a\tau_1^2/2)}{\tau_1} = \frac{L}{\tau_1} - \frac{a\tau_1}{2}\,. \tag{2}$$

$$T = \frac{v_0}{|a|} = \frac{v_0}{-a} = \frac{\tau_1}{2} - \frac{L\tau_1\tau_2(\tau_1+\tau_2)}{\tau_1\cdot 2L(\tau_1-\tau_2)};$$

$$T = \frac{\tau_2^2 + 2\tau_1\tau_2 - \tau_1^2}{2(\tau_2-\tau_1)} = \frac{1{,}5^2 + 2\cdot 1{,}5 - 1}{2\cdot 0{,}5} = 4{,}25\text{ с.}$$

2. Ответ. $H = \dfrac{(v_0^2 + (g\tau)^2 - v^2)^2}{8g^3\tau^2} \approx 2{,}9$ м.

Решение. $$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0\cos\alpha,\\ v_y &= v_0\sin\alpha - g\tau\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2\cos^2\alpha + v_0^2\sin^2\alpha + (g\tau)^2 - 2v_0\sin\alpha\cdot g\tau,$$

$$\Rightarrow\quad v^2 = v_0^2 + (g\tau)^2 - 2v_0\sin\alpha\cdot g\tau \Rightarrow \sin\alpha = \frac{v_0^2 + (g\tau)^2 - v^2}{2v_0 g\tau}\,.$$

$$H = \frac{(v_0\sin\alpha)^2}{2g} = \frac{(v_0^2 + (g\tau)^2 - v^2)^2}{8g^3\tau^2} =$$

$$= \frac{(10^2 + (10 \cdot 0{,}5)^2 - 7^2)^2}{/} 8 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5^2 \approx 2{,}9 \text{ м}.$$

3. Ответ. $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$; $\quad \alpha \approx 54{,}7^\circ$.

Решение. T — сила натяжения нити.

$$T\cos\alpha = mg; \quad T = \frac{mg}{\cos\alpha}\,. \tag{1}$$

$$T - mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{l}\,. \tag{2}$$

$$(1) \to (2): \ \frac{mg}{\cos\alpha} - mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{l};$$

$$v^2 = gl\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right) = \frac{gl\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\,. \tag{3}$$

$$\text{ЗСЭ: } \frac{mv^2}{2} = mgl\cos\alpha. \tag{4}$$

$$(3) \to (4): \ \frac{gl\sin^2\alpha}{2\cos\alpha} = gl\cos\alpha; \quad \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha;$$

$$\sin^2\alpha = 2(1 - \sin^2\alpha). \quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad \alpha \approx 54{,}7^\circ.$$

4. Ответ. $\Delta m_2 = \dfrac{m_1c_1(t_{\text{пл}} - t_1) - m_2c_2(t_2 - t_{\text{пл}})}{\lambda} = \dfrac{2 \cdot 2100 \cdot 5 - 0{,}2 \cdot 4200 \cdot 5}{3{,}3 \cdot 10^5} \approx 0{,}051$ кг. $m = m_1 + \Delta m_2 \approx \approx 2 + 0{,}051 = 2{,}051$ кг.

Решение. Предположим, что часть воды замерзает. Тепло, отданное водой:

$$Q_1 = m_2c_2(t_2 - t_{\text{пл}}) + \Delta m_2\lambda. \tag{1}$$

Тепло, полученное льдом:

$$Q_2 = m_1c_1(t_{\text{пл}} - t_1). \tag{2}$$

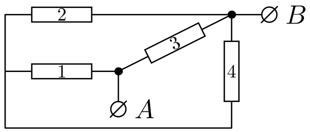
Т.к. $Q_1 = Q_2$, то из (1), (2): $m_2c_2(t_2 - t_{\text{пл}}) + \Delta m_2\lambda = m_1c_1(t_{\text{пл}} - t_1)$;

$$\Delta m_2 = \frac{m_1c_1(t_{\text{пл}} - t_1) - m_2c_2(t_2 - t_{\text{пл}})}{\lambda} =$$

$$= \frac{2 \cdot 2100 \cdot 5 - 0{,}2 \cdot 4200 \cdot 5}{3{,}3 \cdot 10^5} \approx 0{,}051 \text{ кг}.$$

Масса льда: $m = m_1 + \Delta m_2 \approx 2 + 0{,}051 = 2{,}051$ кг.

5. Ответ. $P = \dfrac{15}{4}\,P_1 = 37{,}5$ Вт.



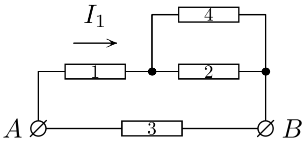


Рис. 2

Решение. U — напряжение между A и B. Сопротивление верхнего участка:

$$r_{124} = r + \frac{r}{2} = \frac{3}{2}r. \tag{1}$$

$$r_{AB} = \frac{r_{124}\cdot r}{r_{124}+r} = \frac{\frac{3}{2}\,r^2}{\frac{3}{2}\,r + r} = \frac{3}{5}r. \tag{2}$$

$$I_1 = \frac{U}{r_{124}} = \frac{U}{\frac{3}{2}\,r} = \frac{2}{3}\frac{U}{r}\,. \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= I_1^2 r = \frac{4}{9}\frac{U^2}{r} \\ P &= \frac{U^2}{r_{AB}} = \frac{5U^2}{3r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{P_1}{P} = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{5} = \frac{4}{15};$$

$$P = \frac{15}{4}P_1 = \frac{15}{4}\cdot 10 = 37{,}5 \text{ Вт.}$$

БИЛЕТ 3, 10 класс

1. Ответ. 1) $L = \dfrac{gt_0^2\operatorname{ctg}\alpha}{4} \approx 9{,}7$ м; 2) $H = \dfrac{gt_0^2}{8} \approx 2{,}8$ м.

Решение. Пусть v — скорость мяча сразу после удара ногой. Запишем уравнения движения мяча по вертикали и горизонтали так, чтобы в них входили искомые параметры:

$$v\sin\alpha = \frac{gt_0}{2};\quad v\cos\alpha\cdot\frac{t_0}{2} = L;\quad H = \frac{(v\sin\alpha)^2}{2g}\,.$$

Из первых двух уравнений находим

$$L = \frac{gt_0^2 \operatorname{ctg}\alpha}{4} \approx 9{,}7 \text{ м.}$$

Из первого и третьего уравнений находим

$$H = \frac{gt_0^2}{8} \approx 2{,}8 \text{ м.}$$

2. Ответ. 1) $\frac{m_2}{m_1} = 2$; 2) $\frac{V_2}{V_0} = \frac{2}{3}$.

Решение. Пусть V_0 — скорость шарика массой m_1 до столкновения, V_1 и V_2 — скорости шариков массой m_1 и m_2 после столкновения. По закону сохранения энергии и импульса имеем уравнения:

$$\frac{m_1V_0^2}{2} = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2}, \quad m_1V_0 = m_1V_1 + m_2V_2.$$

Из этих уравнений находим:

$$V_1 = V_0\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}; \qquad V_2 = \frac{2m_1V_0}{m_1 + m_2}.$$

Из первого равенства видно, что шарик массой m_1 движется назад при условии $m_2 > m_1$.

1) По условию $V_1 = V_0 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = -\frac{V_0}{3}$. Отсюда $\frac{m_2}{m_1} = 2$.

2) Из второго равенства при условии $\frac{m_2}{m_1} = 2$, находим $\frac{V_2}{V_0} = \frac{2}{3}$.

3. Ответ. $\frac{V}{U} = 2$.

Решение. Пусть в лабораторной системе отсчета (ЛСО) скорость шарика V, скорость бруска U. Перейдем в инерциальную систему отсчета, связанную с бруском. В ней брусок покоится, а шарик движется к нему со скоростью $V + U$. После упругого соударения с тяжелым бруском шарик движется в обратном направлении со скоростью $V + U$. В ЛСО шарик после столкновения движется со скоростью $V + U + U = V + 2U$. По условию $V + 2U = 2V$. Из последнего равенства находим $\frac{V}{U} = 2$.

4. Ответ. 1) $T = \dfrac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{\nu_1 + \nu_2} = 375$ К;

2) $\dfrac{P}{P_2} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{\nu_1 T_1}{\nu_2 T_2}\right) = 1$.

Решение. Пусть T и P конечные температура и давление в смеси газов, P_1 , P_2 и V — начальные давления и объемы газов в сосудах.

1) Температуру T найдем из условия сохранения суммарной внутренней энергии газов:

$$\nu_1 \frac{3}{2} R T_1 + \nu_2 \frac{3}{2} R T_2 = (\nu_1 + \nu_2) \frac{3}{2} R T.$$

Отсюда $T = \dfrac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{\nu_1 + \nu_2} = 375$ К.

2) Уравнение состояния газов:

$$P_1 V = \nu_1 R T_1, \quad P_2 V = \nu_2 R T_2, \quad P \cdot 2V = (\nu_1 + \nu_2) R T.$$

С учетом найденной температуры T , получим

$$\frac{P}{P_2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\nu_1 T_1}{\nu_2 T_2}\right) = 1.$$

5. Ответ. 1) $\dfrac{T_3}{T_1} = n^3 = 27$, 2) $\dfrac{A_{12}}{A_{23}} = \dfrac{2}{n(n+1)} = \dfrac{1}{6}$.

Решение. По условию на изобаре: $P_1 = P_2$, $V_2 = nV_1$. В процессе 2–3: $P_3 = nP_2 = nP_1$,

$$V_3 = nV_2 = n^2 V_1.$$

1) Из равенства $\dfrac{P_1 V_1}{T_1} = \dfrac{P_3 V_3}{T_3}$ с учетом вышеприведенных формул получим:

$$T_3 = n^3 T_1 = 27 T_1.$$

2) Работа газа в изобарическом процессе:

$$A_{12} = P_1 (V_2 - V_1) = (n-1) P_1 V_1.$$

Работа газа в процессе 2–3:

$$A_{23} = \frac{1}{2}(P_2 + P_3)(V_3 - V_2) = \frac{1}{2} n(n+1)(n-1) P_1 V_1.$$

Окончательно получается $\dfrac{A_{12}}{A_{23}} = \dfrac{2}{(n+1)n} = \dfrac{1}{6}$.

БИЛЕТ 4, 10 класс

1. Ответ. 1) $L = \dfrac{g t_0^2 \operatorname{ctg} \alpha}{4} \approx 5{,}8$ м; 2) $H = \dfrac{g t_0^2}{8} \approx 5$ м.

Решение. Пусть v — скорость мяча сразу после удара ногой. Запишем уравнения движения мяча по вертикали и горизонтали так, чтобы в них входили искомые параметры:

$$v\sin\alpha = \frac{gt_0}{2}; \quad v\cos\alpha\cdot\frac{t_0}{2} = L; \quad H = \frac{(v\sin\alpha)^2}{2g}.$$

Из первых двух уравнений находим

$$L = \frac{gt_0^2\operatorname{ctg}\alpha}{4} \approx 5{,}8 \text{ м.}$$

Из первого и третьего уравнений находим

$$H = \frac{gt_0^2}{8} \approx 5 \text{ м.}$$

2. Ответ. 1) $\frac{m_2}{m_1} = 3$; 2) $\frac{V_2}{V_0} = \frac{1}{2}$.

Решение. Пусть V_0 — скорость шарика массой m_1 до столкновения, V_1 и V_2 — скорости шариков массой m_1 и m_2 после столкновения. По закону сохранения энергии и импульса имеем уравнения:

$$\frac{m_1V_0^2}{2} = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2}, \quad m_1V_0 = m_1V_1 + m_2V_2.$$

Из этих уравнений находим:

$$V_1 = V_0\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}; \quad V_2 = \frac{2m_1V_0}{m_1 + m_2}.$$

Из первого равенства видно, что шарик массой m_1 движется назад при условии $m_2 > m_1$.

3) По условию $V_1 = V_0\,\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = -\frac{V_0}{2}$. Отсюда $\frac{m_2}{m_1} = 3$.

4) Из второго равенства при условии $\frac{m_2}{m_1} = 3$, находим $\frac{V_2}{V_0} = \frac{1}{2}$.

3. Ответ. $\frac{V}{U} = \frac{2}{3}$.

Решение. Пусть в лабораторной системе отсчета (ЛСО) скорость шарика V, скорость бруска U. Перейдем в инерциальную систему отсчета, связанную с бруском. В ней брусок покоится, а шарик движется к нему со скоростью $V + U$. После упругого соударения с тяжелым бруском шарик движется в обратном направлении со скоростью $V+U$. В ЛСО шарик после столкновения движется со скоростью $V+U+U=V+2U$. По условию $V+2U=4V$. Из последнего равенства находим $\dfrac{V}{U}=\dfrac{2}{3}$.

4. Ответ. 1) $T=\dfrac{\nu_1T_1+\nu_2T_2}{\nu_1+\nu_2}=240$ К;

2) $\dfrac{P}{P_1}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\nu_2T_2}{\nu_1T_1}\right)=1$.

Решение. Пусть T и P — конечные температура и давление в смеси газов, P_1, P_2 и V — начальные давления и объемы газов в сосудах.

3) Температуру T найдем из условия сохранения суммарной внутренней энергии газов:

$$\nu_1\frac{3}{2}RT_1+\nu_2\frac{3}{2}RT_2=(\nu_1+\nu_2)\frac{3}{2}RT.$$

Отсюда $T=\dfrac{\nu_1T_1+\nu_2T_2}{\nu_1+\nu_2}=240$ К.

4) Уравнение состояния газов:

$$P_1V=\nu_1RT_1,\quad P_2V=\nu_2RT_2,\quad P\cdot 2V=(\nu_1+\nu_2)RT.$$

С учетом найденной температуры T, получим

$$\frac{P}{P_1}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\nu_2T_2}{\nu_1T_1}\right)=1.$$

5. Ответ. 1) $\dfrac{T_3}{T_1}=n^3=8$, 2) $\dfrac{A_{12}}{A_{23}}=\dfrac{2}{n(n+1)}=\dfrac{1}{3}$.

Решение. По условию на изобаре: $P_1=P_2$, $V_2=nV_1$. В процессе 2–3: $P_3=nP_2=nP_1$,

$$V_3=nV_2=n^2V_1.$$

Из равенства $\dfrac{P_1V_1}{T_1}=\dfrac{P_3V_3}{T_3}$ с учетом вышеприведенных формул получим:

$$T_3=n^3T_1=8T_1.$$

4) Работа газа в изобарическом процессе:

$$A_{12}=P_1(V_2-V_1)=(n-1)P_1V_1.$$

Работа газа в процессе 2–3:

$$A_{23}=\frac{1}{2}(P_2+P_3)(V_3-V_2)=\frac{1}{2}n(n+1)(n-1)P_1V_1.$$

Окончательно получается $\dfrac{A_{12}}{A_{23}} = \dfrac{2}{(n+1)n} = \dfrac{1}{3}$.

БИЛЕТ 5, 11 класс

1. Ответ. $V = \sqrt{5gl} = 5$ м/с.

Решение. Пусть m — масса шарика, l — длина нити, V — минимальная скорость, V_1 — скорость в верхней точке. В верхней точке сила натяжения равна нулю. По второму закону Ньютона для верхней точки $0 + mg = \dfrac{mV_1^2}{l}$. По ЗСЭ $\dfrac{mV^2}{2} = \dfrac{mV_1^2}{2} + mg2l$. Отсюда $V = \sqrt{5gl} = 5$ м/с.

2. Ответ. 1) $H = \dfrac{3}{8}\dfrac{V_0^2}{g}$; 2) $V = \dfrac{1}{2}V_0$.

Решение. 1) Пусть V_1 — скорость шайбы и горки при максимальной высоте подъема H . По ЗСИ и ЗСЭ $mV_0 = (3m + m)V_1$, $\dfrac{1}{2}mV_0^2 = \dfrac{1}{2}(3m+m)V_1^2 + mgH$. Отсюда $H = \dfrac{3}{8}\dfrac{V_0^2}{g}$.

2) Пусть u — скорость горки после съезда шайбы. По ЗСИ и ЗСЭ $mV_0 = 3mu - mV$, $\dfrac{1}{2}mV_0^2 = \dfrac{1}{2}3mu^2 + \dfrac{1}{2}mV^2$. Отсюда $V = \dfrac{1}{2}V_0$.

3. Ответ. 1) $t = 15\,^\circ\mathrm{C}$; 2) $P = 1{,}44 \cdot 10^5$ Па.

Решение. 1) Суммарная внутренняя энергия газов сохраняется: $\nu_1 \dfrac{3}{2}RT_1 + \nu_2 \dfrac{3}{2}RT_2 = (\nu_1 + \nu_2)\dfrac{3}{2}RT$. Здесь $T_1 = 300$ К, $T_2 = 280$ К. Отсюда

$$T = \frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{\nu_1 + \nu_2} = 288\ \mathrm{K}\ (15\,^\circ\mathrm{C}).$$

2) $PV = (\nu_1 + \nu_2)RT$. С учетом выражения для T получим

$$P = \frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{V}R = 1{,}44 \cdot 10^5\ \text{Па}.$$

4. Ответ. 1) $C = \dfrac{4}{3}C_0$; 2) $q = \dfrac{1}{3}C_0\mathscr{E}$.

Решение. Пусть расстояние между обкладками d, площадь обкладок S .

1) $C_0 = \dfrac{\mathscr{E}_0 S}{d}$, $C = \dfrac{\mathscr{E}_0 S}{3d/4}$. Отсюда $C = \dfrac{4}{3} C_0$.

2) $q = C\mathscr{E} - C_0\mathscr{E} = \dfrac{1}{3} C_0\mathscr{E}$.

5. Ответ. 1) $I_0 = \dfrac{\mathscr{E}}{R}$; 2) $T = \dfrac{3}{4}\mathscr{E}$; 3) $Q = \dfrac{9}{32} C\mathscr{E}^2$.

Решение. 1) Сразу после замыкания ключа ток через R_1 равен нулю. Ток через источник $I_0 = \dfrac{\mathscr{E}}{R}$.

2) В установившемся режиме ток через конденсатор равен нулю. Напряжение на конденсаторе равно напряжению на R_1 : $U = \dfrac{\mathscr{E}}{R+3R} 3R = \dfrac{3}{4}\mathscr{E}$.

3) $Q = \dfrac{1}{2} CU^2 = \dfrac{9}{32} C\mathscr{E}^2$.

БИЛЕТ 6, 11 класс

1. Ответ. $V = \sqrt{5gl} = 3$ м/с.

Решение. Пусть m — масса шарика, l — длина нити, V — минимальная скорость, V_1 — скорость в верхней точке. В верхней точке сила натяжения равна нулю. По второму закону Ньютона для верхней точки $0 + mg = \dfrac{mV_1^2}{l}$. По ЗСЭ $\dfrac{mV^2}{2} = \dfrac{mV_1^2}{2} + mg2l$. Отсюда $V = \sqrt{5gl} = 3$ м/с.

2. Ответ. 1) $H = \dfrac{2}{5}\dfrac{V_0^2}{g}$; 2) $V = \dfrac{3}{5} V_0$.

Решение. 1) Пусть V_1 — скорость монеты и горки при максимальной высоте подъема H . По ЗСИ и ЗСЭ $mV_0 = (4m + m)V_1$, $\dfrac{1}{2} mV_0^2 = \dfrac{1}{2}(4m+m)V_1^2 + mgH$. Отсюда $H = \dfrac{2}{5}\dfrac{V_0^2}{g}$.

2) Пусть u — скорость горки после съезда монеты. По ЗСИ и ЗСЭ $mV_0 = 4mu - mV$, $\dfrac{1}{2} mV_0^2 = \dfrac{1}{2} 4mu^2 + \dfrac{1}{2} mV^2$. Отсюда $V = \dfrac{3}{5} V_0$.

3. Ответ. 1) $t = 31\,^\circ\mathrm{C}$; 2) $P = 1{,}52 \cdot 10^5$ Па.

Решение. 1) Суммарная внутренняя энергия газов сохраняется: $\nu_1 \frac{3}{2} RT_1 + \nu_2 \frac{3}{2} RT_2 = (\nu_1 + \nu_2) \frac{3}{2} RT$. Здесь $T_1 = 400$ К, $T_2 = 280$ К. Отсюда

$$T = \frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{\nu_1 + \nu_2} = 304 \text{ К } (31\ ^\circ\text{C}).$$

2) $PV = (\nu_1 + \nu_2)RT$. С учетом выражения для T получим

$$P = \frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{V} R = 1{,}52 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

4. Ответ. 1) $C = \frac{3}{2} C_0$; 2) $q = \frac{1}{2} C_0 \mathscr{E}$.

Решение. Пусть расстояние между обкладками d, площадь обкладок S.

1) $C_0 = \frac{\mathscr{E}_0 S}{d}$, $C = \frac{\mathscr{E}_0 S}{2d/3}$. Отсюда $C = \frac{3}{2} C_0$.

2) $q = C\mathscr{E} - C_0\mathscr{E} = \frac{1}{2} C_0 \mathscr{E}$.

5. Ответ. 1) $I_0 = \frac{\mathscr{E}}{R}$; 2) $U = \frac{4}{5} \mathscr{E}$; 3) $Q = \frac{8}{25} C\mathscr{E}^2$.

Решение. 1) Сразу после замыкания ключа ток через R_1 равен нулю. Ток через источник $I_0 = \frac{\mathscr{E}}{R}$.

2) В установившемся режиме ток через конденсатор равен нулю. Напряжение на конденсаторе равно напряжению на R_1: $U = \frac{\mathscr{E}}{R + 4R} 4R = \frac{4}{5} \mathscr{E}$.

3) $Q = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{8}{25} C\mathscr{E}^2$.

МАТЕМАТИКА

БИЛЕТ 1, 9 класс

1. Ответ. 72; 222.

Решение. Находим координаты точек пересечения параболы с каждой из данных прямых (рассматриваем только случай $a > 0$, т.к. иначе третья прямая не высекает отрезка на параболе):

$$\begin{cases} y = 3x^2, \\ y = 147 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \pm 7, \\ y = 147; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x^2, \\ y = 75 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \pm 5, \\ y = 75; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x^2, \\ y = a \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}, \\ y = a. \end{cases}$$

Тогда длины высеченных отрезков равны 14, 10 и $\sqrt{\frac{4a}{3}}$. Прямой угол может лежать только напротив большей стороны треугольника, так что возможны два случая.

1) Прямой угол лежит напротив стороны, равной $\sqrt{\frac{4a}{3}}$. Тогда по теореме Пифагора получаем $\frac{4a}{3} = 196 + 100$, откуда $a = 222$.

2) Прямой угол лежит напротив стороны, равной 14. Тогда по теореме Пифагора получаем $196 = 100 + \frac{4a}{3}$, откуда $a = 72$.

2. Ответ. 15.

Решение. Пусть прямые DA и CB пересекаются в точке M (см. рис. 1). Треугольник CMD равносторонний, так как радиусы всех окружностей одинаковы. Обозначим радиусы окружностей через r, а расстояния от вершины C до точек касания окружности ω_2 со сторонами треугольника CMD через x (эти расстояния равны как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки). Тогда расстояния от точки D до точек касания окружности ω_1 со сторонами треугольника CMD также равны x (ввиду того, что треугольник равносторонний), а расстояния между точками касания любой стороны треугольника CMD с окружностями равно $2r$. Пусть также расстояния от вершины A до точек касания окружности ω_3 со сторонами данного четырёхугольника равны a, а расстояния от вершины B до точек касания окружности ω_3 со сторонами данного четырёхугольника равны b. Тогда данное в пункте а) равенство принимает вид $(x+2r+a)+(x+2r+b)-(a+b)-(2x+2r)=30$, откуда $r=15$.

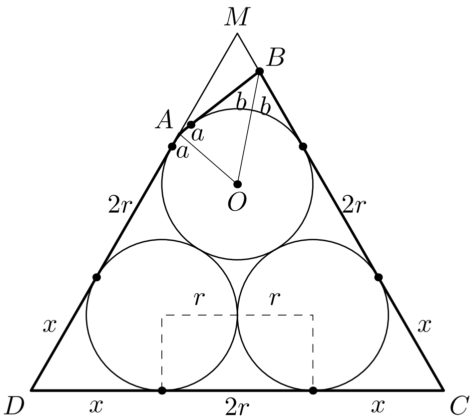


Рис. 1

3. Ответ. 364.

Решение. Пусть в альбоме p листов, а общее количество марок у Чиполлино равно k. Тогда если на каждый из листов альбома наклеено по 22 марки (т.е. всего $22p$ марок), то это меньше, чем общее количество марок у Чиполлино, поэтому $22p<k$.

Если распределять марки по 26 штук на лист, то по крайней мере один лист остаётся пустым. Это означает, что количество марок у Чиполлино не превосходит $26(p-1)$, т.е. $k\leqslant 26(p-1)$.

Наконец, последнее условие означает, что $k+21p=700$, откуда $k=700-21p$. Подставляем это в два полученных выше неравенства:

$$\begin{cases} 22p<700-21p, \\ 700-21p\leqslant 26(p-1) \end{cases} \iff \begin{cases} p<\dfrac{700}{43}, \\ p\geqslant\dfrac{726}{47}. \end{cases}$$

Этой системе неравенств удовлетворяет единственное целое значение p — это $p = 16$. Значит, всего у Чиполлино $700 - 21 \cdot 16 = 364$ марки.

4. Ответ. $\pm 2\sqrt{\sqrt{2}+1}$.

Решение. Обе части неравенства неотрицательны, поэтому можем возвести их в квадрат. Получаем $(ax - 3a)^2 \leqslant x - 1$. Так как в этом неравенстве записано, что выражение, находившееся под корнем, не меньше полного квадрата, неравенство равносильно исходному. Приводим подобные слагаемые: $a^2x^2 - \left(6a^2+1\right)x + \left(9a^2+1\right) \leqslant 0$.

Если $a = 0$, то $x \geqslant 1$, что не удовлетворяет требованиям задачи. При всех остальных a рассматриваемое неравенство является квадратным, а график его левой части есть парабола с ветвями вверх. Если дискриминант меньше нуля, то решений у этого неравенства нет; если дискриминант равен нулю, то у неравенства единственное решение; если дискриминант больше нуля, то множество решений — это промежуток между корнями.

Дискриминант D равен $\left(6a^2+1\right)^2 - 4a^2\left(9a^2+1\right) = 8a^2 + 1$. Корни равны $\dfrac{6a^2+1 \pm \sqrt{D}}{2a^2}$, а расстояние между ними есть $\dfrac{\sqrt{D}}{a^2}$. По условию это расстояние должно быть равно 4, откуда $\sqrt{D} = 4a^2$, $D = 16a^4$, $16a^4 - 8a^2 - 1 = 0$, $a = \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}$.

5. Ответ. 24552.

Решение. Положение семёрок можно выбрать 12 способами. После этого в каждом из случаев остаётся разместить двойки и пятёрки. На каждую позицию мы можем поставить любую из этих двух цифр, поэтому получаем 2^{11} способов; однако среди них не подходят те два способа, когда все выбранные цифры одинаковы, так как по условию каждая цифра была использована по крайней мере один раз. Таким образом, в этом случае есть $12\left(2^{11} - 2\right) = 24552$ способа.

6. Ответ. 20.

Решение. Обозначим $CL : LT = \alpha$, а площадь треугольника

ABC через S (см. рис. 2). По теореме Менелая для треугольника ACL и секущей BF получаем $\frac{AF}{FC}\cdot\frac{CB}{BL}\cdot\frac{LQ}{QA}=1$, откуда $\frac{3}{5}\cdot(\alpha+1)\cdot\frac{LQ}{QA}=1$, $\frac{LQ}{QA}=\frac{5}{3\alpha+3}$.

Треугольники ALB и ACB имеют общую высоту, проведённую из вершины A, поэтому их площади относятся как основания, т.е. $S_{\triangle ALB}=\frac{S}{\alpha+1}$.

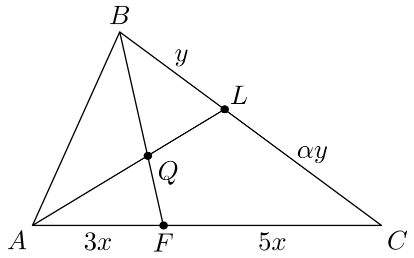


Рис. 2

Треугольники ALB и QLB имеют общую высоту, проведённую из вершины B, поэтому их площади также относятся как основания, следовательно $S_{\triangle BLQ}:S_{\triangle BLA}=\frac{QL}{AL}=\frac{5}{3\alpha+8}$. Значит, $S_{\triangle BLQ}=\frac{5S}{(3\alpha+8)(\alpha+1)}$. По условию эта площадь равна $\frac{4S}{25}$; получаем уравнение $4(3\alpha+8)(\alpha+1)=125$, откуда $\alpha=\frac{3}{2}$ (второй корень этого уравнения отрицателен).

Отношение расстояний от точек L и Q до прямой AC равно $LA:QA=(8+3\alpha):(3+3\alpha)=5:3$. Следовательно, искомое расстояние равно $12\cdot\frac{5}{3}=20$.

7. Ответ. 960.

Решение. Пусть $d_1,\ldots,d_5$ — числа из первого промежутка, $d_6,\ldots,d_{10}$ — числа из второго промежутка, $d_{11},\ldots,d_{15}$ — числа из третьего промежутка и т.д.

Заметим, что каждое из чисел второго промежутка представимо в виде $d_i=25+c_i$, где $1\leqslant c_i\leqslant 25$, каждое из чисел третьего промежутка представимо в виде $d_i=50+c_i$, где $1\leqslant c_i\leqslant 25$ и т.д. Пусть также $c_1=d_1,\ldots,c_5=d_5$.

С учётом введённых обозначений сумма данных чисел равна $5\cdot(25+50+75)+c_1+c_2+\ldots+c_{20}=750+c_1+c_2+\ldots+$ $+c_{20}$. Отметим также, что все числа $c_1, c_2,\ldots,c_{20}$ должны быть различны (если $c_i = c_j$, то разность $d_i - d_j$ делится на 25, а если $c_i \neq c_j$, то разность $d_i - d_j$ не делится на 25). Значит, сумма чисел d_i минимальна, если c_i принимают значения от 1 до 20 (в любом порядке); это минимальное значение суммы равно $750 + 1 + 2 + \ldots + 20 = 750 + \dfrac{1+20}{2} \cdot 20 = 960$.

БИЛЕТ 2, 9 класс

1. Ответ. $205\,,\quad 45\,.$

2. Ответ. $14.$

3. Ответ. $372.$

4. Ответ. $\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-2}{2}}\,.$

5. Ответ. $53222.$

6. Ответ. $15.$

7. Ответ. $1740.$

БИЛЕТ 3, 10 класс

1. Ответ. $a=\dfrac{23}{8}\,,\quad a=\dfrac{41}{8}\,.$

Решение. Находим координаты точек пересечения параболы с каждой из данных прямых (рассматриваем только случай, когда дискриминант квадратного уравнения в третьей системе положителен, т.к. иначе прямая $y=a$ не высекает отрезка на параболе):

$$\begin{cases} y=2x^2-5x+1, \\ y=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2 \ \text{ или } \ x=\dfrac{1}{2}\,, \\ y=-1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2x^2-5x+1, \\ y=4 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3 \ \text{ или } \ x=-\dfrac{1}{2}\,, \\ y=4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2x^2-5x+1, \\ y=a \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{5\pm\sqrt{17+8a}}{4}\,, \\ y=a. \end{cases}$$

Тогда длины высеченных отрезков равны $\dfrac{3}{2}\,,\ \dfrac{7}{2}$ и $\dfrac{\sqrt{17+8a}}{2}\,.$ Прямой угол может лежать только напротив большей стороны треугольника, так что возможны два случая.

1) Прямой угол лежит напротив стороны, равной $\dfrac{\sqrt{17+8a}}{2}\,.$ Тогда по теореме Пифагора получаем $\dfrac{17+8a}{4}=\dfrac{9}{4}+\dfrac{49}{4}\,,$ откуда $a=\dfrac{41}{8}\,.$

2) Прямой угол лежит напротив стороны, равной $\frac{7}{2}$. Тогда по теореме Пифагора получаем $\frac{49}{4} = \frac{17+8a}{4} + \frac{9}{4}$, откуда $a = \frac{23}{8}$.

2. Ответ. 53222.

Решение. Положение девяток можно выбрать 13 способами. После этого в каждом из случаев остаётся разместить тройки и четвёрки. На каждую позицию мы можем поставить любую из этих двух цифр, поэтому получаем 2^{12} способов; однако среди них не подходят те два способа, когда все выбранные цифры одинаковы, так как по условию каждая цифра была использована по крайней мере один раз. Таким образом, в этом случае есть $13\left(2^{12}-2\right) = 53222$ способа.

3. Ответ. а) 12; б) 60°.

Решение. а) Пусть прямые DA и CB пересекаются в точке M (см. рис. 1, стр. 33). Треугольник CMD равносторонний, так как радиусы всех окружностей одинаковы. Обозначим радиусы окружностей через r, а расстояния от вершины C до точек касания окружности ω_2 со сторонами треугольника CMD через x (эти расстояния равны как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки). Тогда расстояния от точки D до точек касания окружности ω_1 со сторонами треугольника CMD также равны x (ввиду того, что треугольник равносторонний), а расстояния между точками касания любой стороны треугольника CMD с окружностями равно $2r$. Пусть также расстояния от вершины A до точек касания окружности ω_3 со сторонами данного четырёхугольника равны a, а расстояния от вершины B до точек касания окружности ω_3 со сторонами данного четырёхугольника равны b. Тогда данное в пункте а) равенство принимает вид $(x+2r+a)+(x+2r+b)-(a+b)-(2x+2r) = 24$, откуда $r = 12$.

б) Поскольку $\angle AMB = 60^\circ$, сумма двух других углов треугольника ABM равна 120°. Следовательно, $\angle DAB +$

$+\angle CBA = 180^\circ - \angle BAM + 180^\circ - \angle ABM = 240^\circ$. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому AO и BO — биссектрисы углов DAB и CBA соответственно. Следовательно, $\angle OAB + \angle OBA = \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle CBA) = 120^\circ$, $\angle AOB = 60^\circ$.

4. Ответ. $\pm\frac{1}{3}\sqrt{\sqrt{13}+2}$.

Решение. Обе части неравенства неотрицательны, поэтому можем возвести их в квадрат. Получаем $(ax-2a)^2 \leqslant x-1$. Так как в этом неравенстве записано, что выражение, находившееся под корнем, не меньше полного квадрата, неравенство равносильно исходному. Приводим подобные слагаемые: $a^2x^2 - \left(4a^2+1\right)x + \left(4a^2+1\right) \leqslant 0$.

Если $a=0$, то $x \geqslant 1$, что не удовлетворяет требованиям задачи. При всех остальных a рассматриваемое неравенство является квадратным, а график его левой части есть парабола с ветвями вверх. Если дискриминант меньше нуля, то решений у этого неравенства нет; если дискриминант равен нулю, то у неравенства единственное решение; если дискриминант больше нуля, то множество решений — это промежуток между корнями.

Дискриминант D равен $\left(4a^2+1\right)^2 - 4a^2\left(4a^2+1\right) = 4a^2+1$. Корни равны $\dfrac{4a^2+1\pm\sqrt{D}}{2a^2}$, а расстояние между ними есть $\dfrac{\sqrt{D}}{a^2}$. По условию это расстояние должно быть равно 3, откуда $\sqrt{D}=3a^2$, $D=9a^4$, $9a^4-4a^2-1=0$, $a=\pm\frac{1}{3}\sqrt{\sqrt{13}+2}$.

5. Ответ. 18.

Решение. Пусть w — количество рабочих, h — количество рабочих часов в день, q — объём работы, выполняемый одним рабочим за один час. Весь объём работы считаем равным единице. Тогда $28whq=1$.

Во второй ситуации количество рабочих равно $w+2$, количество рабочих часов в день равно $h+1$, а работа выполняется за 21 день, следовательно, $21(w+2)(h+1)q=1$.

В третьей ситуации количество рабочих равно $w+6$, количество рабочих часов в день равно $h+2$, а работа выполняется за 15 дней, следовательно, $15(w+6)(h+2)q=1$.

Подставляя в правые части второго и третьего уравнений $28whq$ вместо 1 и сокращая на *положительное* число q, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 21(w+2)(h+1)=28hw, \\ 15(w+6)(h+2)=28hw, \end{cases}$$

которая после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых принимает вид

$$\begin{cases} hw-6h-3w-6=0, \\ 13hw-90h-30w-180=0. \end{cases}$$

Вычитаем из второго уравнения, первое уравнение, умноженное на 13:

$$-12h+9w-102=0 \iff h=\frac{3w-34}{4}.$$

Подставляем это выражение в первое уравнение последней системы:

$$\frac{3w^2-34w}{4}-\frac{9w-102}{2}-3w-6=0 \iff$$
$$\iff \frac{3}{4}w^2-16w+45=0 \iff \left[\begin{aligned} w&=18, \\ w&=\frac{10}{3}. \end{aligned}\right.$$

Дробное значение w не подходит, поэтому $w=18$.

6. Ответ. 4.

Решение. Обозначим $CL:LB=\alpha$, а площадь треугольника ABC через S (см. рис. 3). По теореме Менелая для треугольника ACL и секущей BF получаем $\frac{AF}{FC}\cdot\frac{CB}{BL}\cdot\frac{LQ}{QA}=1$, откуда $\frac{7}{3}\cdot(\alpha+1)\cdot\frac{LQ}{QA}=1$, $\frac{LQ}{QA}=\frac{3}{7\alpha+7}$.

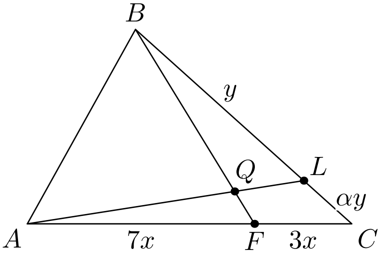


Рис. 3

Треугольники ALB и ACB имеют общую высоту, проведённую из вершины A, поэтому их площади относятся как основания, т.е. $S_{\triangle ALB}=\frac{S}{\alpha+1}$.

Треугольники ALB и QLB имеют общую высоту, проведённую из вершины B, поэтому их площади также относятся как основания, следовательно $S_{\triangle BLQ} : S_{\triangle BLA} = \dfrac{QL}{AL} = \dfrac{3}{7\alpha + 10}$. Значит, $S_{\triangle BLQ} = \dfrac{3S}{(7\alpha+10)(\alpha+1)}$. По условию эта площадь равна $\dfrac{7S}{36}$; получаем уравнение $7(7\alpha+10)(\alpha+1) = 108$, откуда $\alpha = \dfrac{2}{7}$ (второй корень этого уравнения отрицателен).

Отношение расстояний от точек L и Q до прямой AC равно $LA : QA = (10+7\alpha) : (7+7\alpha) = 4 : 3$. Следовательно, искомое расстояние равно $3 \cdot \dfrac{4}{3} = 4$.

7. Ответ. 1524.

Решение. Пусть $d_1, \ldots, d_6$ — числа из первого промежутка, $d_7, \ldots, d_{12}$ — числа из второго промежутка, $d_{13}, \ldots, d_{18}$ — числа из третьего промежутка и т.д.

Заметим, что каждое из чисел второго промежутка представимо в виде $d_i = 30 + c_i$, где $1 \leqslant c_i \leqslant 30$, каждое из чисел третьего промежутка представимо в виде $d_i = 60 + c_i$, где $1 \leqslant c_i \leqslant 30$ и т.д. Пусть также $c_1 = d_1, \ldots, c_6 = d_6$.

С учётом введённых обозначений сумма данных чисел равна $6 \cdot (30 + 60 + 90) + c_1 + c_2 + \ldots + c_{24} = 1080 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{24}$. Отметим также, что все числа $c_1, c_2, \ldots, c_{24}$ должны быть различны (если $c_i = c_j$, то разность $d_i - d_j$ делится на 30, а если $c_i \neq c_j$, то разность $d_i - d_j$ не делится на 30). Значит, сумма чисел d_i максимальна, если c_i принимают значения от 7 до 30 (в любом порядке); это максимальное значение суммы равно $1080 + 7 + 8 + \ldots + 30 = 1080 + \dfrac{7+30}{2} \cdot 24 = 1524$.

БИЛЕТ 4, 10 класс

1. Ответ. $\dfrac{50}{3}$; $\dfrac{52}{3}$.

2. Ответ. 11242.

3. Ответ. а) 19; б) 60°.

4. Ответ. $\pm\sqrt{\sqrt{5} - 2}$.

5. Ответ. 12.

6. Ответ. 39.

7. Ответ. 3122.

БИЛЕТ 5, 11 класс

1. Ответ. 50; 158.

Решение. Находим координаты точек пересечения параболы с каждой из данных прямых (рассматриваем только случай $a > 0$, т.к. иначе третья прямая не высекает отрезка на параболе):

$$\begin{cases} y = 2x^2, \\ y = 98 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 7, \\ y = 98; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x^2, \\ y = 18 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 3, \\ y = 18; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x^2, \\ y = a \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{a}{2}}, \\ y = a. \end{cases}$$

Тогда длины высеченных отрезков равны 14, 6 и $\sqrt{2a}$. Угол 120° может лежать только напротив большей стороны треугольника, так что возможны два случая.

1) Угол 120° лежит напротив стороны, равной $\sqrt{2a}$. Тогда по теореме косинусов получаем $2a = 196+36-2\cdot 14\cdot 6\cdot\cos 120^\circ$, откуда $a = 158$.

2) Угол 120° лежит напротив стороны, равной 14. Тогда по теореме косинусов получаем $196 = 2a+36-2\cdot\sqrt{2a}\cdot 6\cdot\cos 120^\circ$, откуда $a + 3\sqrt{2}\sqrt{a} - 80 = 0$, $\sqrt{a} = 5\sqrt{2}$ или $\sqrt{a} = -8\sqrt{2}$, следовательно, $a = 50$.

2. Ответ. $g_{\min} = \dfrac{55}{16}$, $g_{\max} = 5$.

Решение. Преобразуем данную функцию:

$$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 10x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 10x + 4 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(2\cos^2 2x - 1\right) + \frac{1}{2}\cos 2x + 4 = \cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{7}{2}.$$

Обозначив $\cos 2x = t$, получаем функцию $f(t) = t^2 + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{7}{2}$, $t \in [-1;\,1]$. Графиком этой функции является парабола с ветвями вверх и вершиной в точке с абсциссой $t_0 = -\dfrac{1}{4}$. Своё наименьшее значение эта функция принимает в вершине, поэтому $f_{\min} = f\left(-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{55}{16}$. Наибольшее значение достигается в точке, наиболее удалённой от вершины, т.е. $f_{\max} = f(1) = 5$.

3. Ответ. 6132.

Решение. Возможны два случая.

1) Число начинается с восьмёрки. Тогда за ней идут ещё шесть восьмёрок, и у нас остаётся 10 последних мест для размещения нулей и семёрок. На каждую позицию мы можем поставить любую из этих двух цифр, поэтому получаем 2^{10} способов; однако среди них не подходят те два способа, когда все выбранные цифры одинаковы, так как по условию каждая цифра была использована по крайней мере один раз. Таким образом, в этом случае есть $2^{10}-2=1022$ способа.

2) Число начинается с семёрки. Тогда мы можем десятью способами выбрать положение восьмёрок. После того, как восьмёрки заняли свои места, остаётся заполнить 9 оставшихся позиций нулями и семёрками; при этом мы обязаны использовать хотя бы один ноль. Следовательно, для каждого варианта расположения восьмёрок у нас есть 2^9-1 способов (вычитаем тот один способ, при котором нет нулей), т.е. всего $10\left(2^9-1\right)$ способов.

Суммируем полученные результаты: $2^{10}-2+10\cdot 2^9-10=$ $=6132$.

4. Ответ. а) 6; б) 60°; в) $\dfrac{29\sqrt{3}}{6}$.

Решение. а) Пусть прямые DA и CB пересекаются в точке M (см. рис. 1, стр. 33). Треугольник CMD равносторонний, так как радиусы всех окружностей одинаковы. Обозначим радиусы окружностей через r, а расстояния от вершины C до точек касания окружности ω_2 со сторонами треугольника CMD через x (эти расстояния равны как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки). Тогда расстояния от точки D до точек касания окружности ω_1 со сторонами треугольника CMD также равны x (ввиду того, что треугольник равносторонний), а расстояния между точками касания любой стороны треугольника CMD с окружностями равно $2r$. Пусть также расстояния от вершины A до точек касания окружности ω_3 со сторонами данного четырёхугольника равны a, а расстояния от вершины B до точек касания окружности ω_3 со сторонами данного четырёхугольника равны b. Тогда данное в пункте а) равенство принимает вид $(x+2r+a)+(x+2r+b)-(a+b)-(2x+2r)=12$, откуда $r=6$.

б) Поскольку $\angle AMB = 60^\circ$, сумма двух других углов треугольника ABM равна 120°. Следовательно, $\angle DAB + {} + \angle CBA = 180^\circ - \angle BAM + 180^\circ - \angle ABM = 240^\circ$. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому AO и BO — биссектрисы углов DAB и CBA соответственно. Следовательно, $\angle OAB + \angle OBA = {} = \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle CBA) = 120^\circ$, $\angle AOB = 60^\circ$.

в) Записывая площадь треугольника OAB двумя способами, получаем равенство $\frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} r \cdot AB$, откуда $AB = \dfrac{29}{2\sqrt{3}}$.

5. Ответ. $\left[-\frac{3}{4}\,;2\right)$.

Решение. Сделаем замену $\sqrt{x+7}=t$. Тогда $x=t^2-7$ и неравенство принимает вид

$$\log_{t+7-t^2}\left(t^2-3\right) \geqslant 1 \Leftrightarrow \log_{t+7-t^2}\left(t^2-3\right) \geqslant \log_{t+7-t^2}\left(t+7-t^2\right).$$

Используя метод рационализации, получаем

$$\begin{cases} \left(t-t^2+6\right)\left(t^2-3-\left(t-t^2+7\right)\right) \geqslant 0, \\ t-t^2+7>0, \\ t-t^2+7 \neq 1, \\ t^2-3>0. \end{cases}$$

Первое неравенство этой системы равносильно следующему: $\left(t^2-t-6\right)\left(2t^2-t-10\right) \leqslant 0$, $(t+2)^2(t-3)(2t-5) \leqslant 0$, откуда $t \in \{-2\} \cup \left[\frac{5}{2}\,;3\right]$.

Из второго неравенства получаем, что $\frac{1-\sqrt{29}}{2} < t < {} < \frac{1+\sqrt{29}}{2}$; из третьего — что $t \neq -2$ и $t \neq 3$; из последнего — что $|t| > \sqrt{3}$.

Пересекая все эти множества, находим, что $t \in \left[\frac{5}{2}\,;3\right)$. Сле-

довательно, $\frac{5}{2} \leqslant \sqrt{x+7} < 3 \iff \frac{25}{4} \leqslant x+7 < 9 \iff$
$\iff -\frac{3}{4} \leqslant x < 2$.

6. Ответ. 16.

Решение. Обозначим $CL : LB = \alpha$, а площадь треугольника ABC через S (см. рис. 4). По теореме Менелая для треугольника ACL и секущей BF получаем $\frac{AF}{FC} \cdot \frac{CB}{BL} \cdot \frac{LQ}{QA} = 1$, откуда $\frac{2}{5} \cdot (\alpha + 1) \cdot \frac{LQ}{QA} = 1$, $\frac{LQ}{QA} = \frac{5}{2\alpha+2}$.

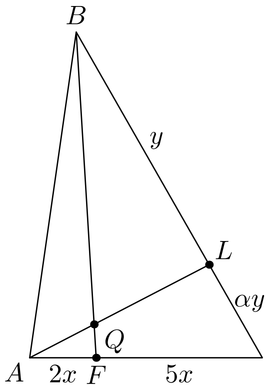


Рис. 4

Треугольники ALB и ACB имеют общую высоту, проведённую из вершины A, поэтому их площади относятся как основания, т.е. $S_{\triangle ALB} = \frac{S}{\alpha+1}$.

Треугольники ALB и QLB имеют общую высоту, проведённую из вершины B, поэтому их площади также относятся как основания, следовательно $S_{\triangle BLQ} : S_{\triangle BLA} = \frac{QL}{AL} = \frac{5}{2\alpha+7}$. Значит, $S_{\triangle BLQ} = \frac{5S}{(2\alpha+7)(\alpha+1)}$. По условию эта площадь равна $\frac{5S}{12}$; получаем уравнение $(2\alpha+7)(\alpha+1) = 12$, откуда $\alpha = \frac{1}{2}$ (второй корень этого уравнения отрицателен).

Отношение расстояний от точек L и Q до прямой AC равно $LA : QA = (7+2\alpha) : (2+2\alpha) = 8 : 3$. Следовательно, искомое расстояние равно $6 \cdot \frac{8}{3} = 16$.

7. Ответ. 3165.

Решение. Пусть $d_1, \ldots, d_6$ — числа из первого промежутка, $d_7, \ldots, d_{12}$ — числа из второго промежутка, $d_{13}, \ldots, d_{18}$ — числа из третьего промежутка и т.д.

Заметим, что каждое из чисел второго промежутка представимо в виде $d_i = 45 + c_i$, где $1 \leqslant c_i \leqslant 45$, каждое из чисел третьего промежутка представимо в виде $d_i = 90 + c_i$, где $1 \leqslant c_i \leqslant 45$ и т.д. Пусть также $c_1 = d_1, \ldots, c_6 = d_6$.

С учётом введённых обозначений сумма данных чисел равна $6 \cdot (45 + 90 + 135 + 180) + c_1 + c_2 + \ldots + c_{30} = 2700 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{30}$. Отметим также, что все числа c_1, $c_2, \ldots, c_{30}$ должны быть различны (если $c_i = c_j$, то разность $d_i - d_j$ делится на 45, а если $c_i \neq c_j$, то разность $d_i - d_j$ не делится на 45). Значит, сумма чисел d_i минимальна, если c_i принимают значения от 1 до 30 (в любом порядке); это минимальное значение суммы равно $2700 + 1 + 2 + \ldots + 30 = 2700 + \dfrac{1 + 30}{2} \cdot 30 = 3165$.

БИЛЕТ 6, 11 класс

1. Ответ. 49; 337.

2. Ответ. $g_{\min} = -\dfrac{73}{16}$, $g_{\max} = -3$.

3. Ответ. 28658.

4. Ответ. а) 5; б) 60°; в) $\dfrac{21\sqrt{3}}{5}$.

5. Ответ. $[-2; 1)$.

6. Ответ. 12.

7. Ответ. 2075.

Учебное издание

З А Д А Ч И

физико-математических олимпиад

«Phystech.International» 2017

Учебно-методические разработки
по физике и математике